Nullstellen von Potenzreihen im Einheitskreis

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von
Ilse Fuchs
aus Marburg/Lahn

Marburg/Lahn 1969

E. Symon · Foto-Druck · 355 Marburg/Lahn · Friedrichstr. 3

Nullstellen von Potenzreihen im Einheitskreis

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von
Ilse Fuchs
aus Marburg/Lahn

Marburg/Lahn 1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 3. 12. 1969

Tag der mündlichen Prüfung am 17.12. 1969

Berichterstatter Prof. Dr. A. Peyerimhoff

Mitberichterstatter Prof. Dr. E. Wirsing

Inhalt

1	Einleitung und Definitionen	1
2	$\int_0^1 (1-t)^\beta \, e^{i\phi t} \, dt$	4
3	Partialsummen der geometrischen Reihe $s_n^\alpha(z)$	8
4	Gegenbeispiel zu einem Satz von Szegö	16
5	Gegenbeispiel zu einem Satz von Peyerimhoff	21
6	Schlußbemerkung	23
7	Literaturverzeichnis	24

Einleitung und Definitionen

Vor dem Einführen in das Thema dieser Arbeit sollen hier die wichtigsten Begriffe erläutert werden.

Zu einer beliebigen reellen Zahlenfolge a_n sei für $\alpha \geq 0$ und $n=0,1,\ldots$

$$\Delta^{\alpha} a_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu-\alpha-1}{\nu} a_{n+\nu}$$

die α-te Differenz, falls die Summe konvergiert. Existiert für a_n außerdem $\Delta^{\beta} a_n$ und ist nichtnegativ für $0 \leq \beta \leq \alpha$ und $n = 0,1,\ldots$, so heißt die Zahlenfolge a_n α-fach monoton.[1])

Sei $g(z)$ in $|z|< 1$ eine reguläre Funktion. Dann heißt $g(z)$ schlicht in $|z|< 1$, wenn für beliebiges komplexes A die Gleichung $g(z) = A$ in $|z|< 1$ höchstens eine Lösung hat.

Es ist zu beachten, daß mit jeder schlichten Funktion

---

[1]) Die hier benutzte Definition der α-fach monotonen Zahlenfolgen weicht von der allgemein üblichen Form ab. In dieser Arbeit werden jedoch nur Nullfolgen benutzt, für die diese Definition nach einem Satz von Knopp [5] mit der üblichen Definition äquivalent ist.

$g(z)$ auch $a + g(z)$ für beliebiges komplexes a in $|z|< 1$ schlicht ist.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Funktionen der Art $F(z) = P_{k-1}(z) + z^k f(z)$, wobei $P_{k-1}(z)$ ein Polynom vom Grade $\leq(k-1)$ und $f(z)$ eine Potenzreihe mit mehrfach monotonen Koeffizienten a_n ist ($f(z) \not\equiv 0$). Speziell wird die Anzahl der Nullstellen von $F(z)$ im Inneren des Einheitskreises untersucht.

Als erstes wird der Fall $k=1$ untersucht, in dem $P_{k-1}(z) = A$ eine komplexe Konstante ist. Szegö hat dazu 1941 einen Satz bewiesen: Sei a_n eine 3-fach monotone Folge und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $|z|< 1$ eine reguläre Funktion. Dann ist $zf(z)$ schlicht in $|z|< 1$; d.h. für beliebiges komplexes a hat $a + zf(z)$ in $|z|< 1$ höchstens eine Nullstelle [8].

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich der Szegösche Satz nicht mehr verbessern läßt: Zu jedem α mit $0 \leq \alpha < 3$ gibt es eine α-fach monotone Folge a_n, so daß $F(z)$ mindestens zwei Nullstellen in $|z|< 1$ hat.

In den Abschnitten 2 und 3 werden die Hilfsmittel zum Beweis des Gegenbeispieles zusammengestellt. In Teil 2 wird das Verhalten der Funktion $\int_0^1 (1-t)^\beta \cos\phi t \, dt$ für $1 \leq \beta \leq 2$ und $0 \leq \phi < \infty$ untersucht. Für $\beta=2$ ist die Funktion fallend, während sie für $\beta<2$ unendlich viele Extremwerte hat. In Teil 3 wird näher auf das Verhalten der arithmetischen Mittel der Ordnung α der geometrischen Reihe $s_n^\alpha(z)$ eingegangen. Für $\alpha<3$ wird in Satz 2 gezeigt, daß es reelle ϕ, ψ gibt, so daß die Punkte der Folge

$$s_n^\alpha(e^{i\phi}) - s_n^\alpha(e^{i\psi}) \qquad \text{für } n=1,2,\ldots$$

nicht in einer Halbebene liegen.

Teil 5 der Arbeit bringt noch einen Satz über die Funktionen $F(z)$. Beschränkt man sich bei $P_{k-1}(z)$ auf Polynome mit reellen Koeffizienten, so besagt ein Satz von Peyerimhoff, daß $F(z)$ höchstens k Nullstellen hat, wenn die a_n $(k+1)$-fach monoton sind. Ein Gegenbeispiel zeigt, daß auch in diesem Satz die Monotonieordnung nicht mehr verbessert werden kann.

2 $\int_0^1 (1-t)^\beta \, e^{i\phi t} \, dt.$

Lemma 1 Sei $1 < \beta < 2$ und $0 \leq \phi < \infty$. Dann gilt

$$\int_0^1 (1-t)^\beta \, e^{i\phi t} \, dt = \frac{i}{\phi} + \frac{\beta}{\phi^2} - \frac{\Gamma(\beta+1)}{\phi^{\beta+1}} \, e^{i(\phi - \frac{1}{2}\pi(\beta-1))} + O\left(\frac{1}{\phi^3}\right).$$

Beweis: Für $0 < \kappa < 1$ gilt

(1) $$\int_0^\infty v^{\kappa-1} \, e^{-iv} \, dv = \Gamma(\kappa) \, e^{-\frac{i}{2}\pi\kappa}$$ Zygmund [9].

Zur Berechnung des Integrals werden die Substitutionen

$(1-t) = u$ und dann $\phi u = v$ durchgeführt.

$$I := \int_0^1 (1-t)^\beta \, e^{i\phi t} \, dt = \int_0^1 u^\beta \, e^{i\phi(1-u)} \, du$$

$$= \frac{e^{i\phi}}{\phi^{\beta+1}} \int_0^\phi v^\beta \, e^{-iv} \, dv.$$

Durch mehrfache partielle Integration erhält man dann:

$$I = \frac{e^{i\phi}}{\phi^{\beta+1}} \left(-\frac{1}{i} \, v^\beta \, e^{-iv} \Big|_0^\phi + \frac{\beta}{i} \int_0^\phi v^{\beta-1} \, e^{-iv} \, dv \right.$$

$$= \frac{i}{\phi} + \frac{\beta e^{i\phi}}{i\phi^{\beta+1}} \left(-\frac{1}{i} \, v^{\beta-1} \, e^{-iv} \Big|_0^\phi + \frac{\beta-1}{i} \int_0^\phi v^{\beta-2} \, e^{-iv} \, dv \right).$$

Setzt man im verbliebenen Integral (1) ein, so gilt:

$$I = \frac{i}{\phi} + \frac{\beta}{\phi^2} - \frac{\beta(\beta-1)e^{i\phi}}{\phi^{\beta+1}} \left(\Gamma(\beta-1)\, e^{-\frac{i}{2}\pi(\beta-1)} - \int_{\phi}^{\infty} v^{\beta-2}\, e^{-iv}\, dv \right)$$

$$= \frac{i}{\phi} + \frac{\beta}{\phi^2} - \frac{\Gamma(\beta+1)}{\phi^{\beta+1}}\, e^{i(\phi - \frac{i}{2}\pi(\beta-1))} + O\left(\frac{1}{\phi^3}\right).$$

Das Restglied wurde dabei abgeschätzt wie folgt:

$$\frac{\beta(\beta-1)e^{i\phi}}{\phi^{\beta+1}} \int_{\phi}^{\infty} v^{\beta-2}\, e^{-iv}\, dv$$

$$= O\left(\frac{1}{\phi^{\beta+1}} \left(\frac{1}{i} v^{\beta-2}\, e^{-iv} \Big|_{\phi}^{\infty} + \frac{\beta-2}{i} \int_{\phi}^{\infty} v^{\beta-3}\, dv \right) \right) = O\left(\frac{1}{\phi^3}\right).$$

Satz 1 Sei $1 \leq \beta \leq 2$ und $0 \leq \phi < \infty$, sowie

$$f_\beta(\phi) = \int_0^1 (1-t)^\beta \cos\phi t\, dt.$$

Behauptung: Zu jedem β mit $1 \leq \beta < 2$ gibt es Intervalle $[\phi_1, \phi_2]$, in denen $f_\beta(\phi)$ wächst. Für $\beta=2$ fällt $f_\beta(\phi)$ für $0 \leq \phi < \infty$.

Beweis: 1. Fall $\beta=1$. Dann läßt sich $f_\beta(\phi)$ explizit berechnen.

$$f_1(\phi) = \int_0^1 (1-t) \cos\phi t\, dt = (1-t) \frac{\sin\phi t}{\phi} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin\phi t}{\phi}\, dt$$

$$f_1(\phi) = \frac{1 - \cos\phi}{\phi^2} \geq 0 \quad \text{und } f_1(\phi) \text{ wächst für } \phi \in [2\pi, \tfrac{5}{2}\pi].$$

2. Fall $1 < \beta < 2$.

Das Integral läßt sich nicht explizit lösen, deshalb wird

$f'_\beta(\phi)$ mit partieller Integration und Lemma 1 abgeschätzt.

$$f'_\beta(\phi) = \frac{d}{d\phi} \int_0^1 (1-t)^\beta \cos\phi t \, dt$$

$$= -\int_0^1 (1-t)^\beta \, t \sin\phi t \, dt$$

$$= -\int_0^1 (1-t)^\beta \sin\phi t \, dt + \int_0^1 (1-t)^{\beta+1} \sin\phi t \, dt$$

$$= -\int_0^1 (1-t)^\beta \sin\phi t \, dt + \frac{1}{\phi} - \frac{\beta+1}{\phi} \int_0^1 (1-t)^\beta \cos\phi t \, dt$$

$$= -\left(\frac{1}{\phi} - \frac{\Gamma(\beta+1)}{\phi^{\beta+1}} \sin(\phi - \tfrac{1}{2}\pi(\beta-1)) + O\left(\frac{1}{\phi^3}\right)\right) + \frac{1}{\phi}$$

$$- \frac{\beta+1}{\phi}\left(\frac{\beta}{\phi^2} - \frac{\Gamma(\beta+1)}{\phi^{\beta+1}} \cos(\phi - \tfrac{1}{2}\pi(\beta-1)) + O\left(\frac{1}{\phi^3}\right)\right).$$

$$f'_\beta(\phi) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\phi^{\beta+1}} \sin(\phi - \tfrac{1}{2}\pi(\beta-1)) + O\left(\frac{1}{\phi^3}\right).$$

Wegen $1 < \beta < 2$ ist $\frac{1}{\phi^3} = o\left(\frac{1}{\phi^{\beta+1}}\right)$. Für genügend große ϕ bestimmt daher der Sinus das Vorzeichen von $f'_\beta(\phi)$. Also gibt es Intervalle $[\phi_1, \phi_2]$, in denen $f'_\beta(\phi) > 0$ ist.

3. Fall $\beta = 2$. Zunächst wird $f_2(\phi)$ berechnet.

$$f_2(\phi) = \int_0^1 (1-t)^2 \cos\phi t \, dt$$

$$= (1-t)^2 \frac{\sin\phi t}{\phi}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 (1-t)\frac{\sin\phi t}{\phi}\, dt$$

$$= 2(1-t)\frac{-\cos\phi t}{\phi^2}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{-\cos\phi t}{\phi^2}\, dt$$

$$= \frac{2}{\phi^2} - \frac{2\sin\phi}{\phi^3} .$$

$$\frac{1}{2} f_2'(\phi) = -\frac{2+\cos\phi}{\phi^3} + \frac{3\sin\phi}{\phi^4}$$

$$= -\frac{1+\cos\phi}{\phi^3} - \frac{\phi - 3\sin\phi}{\phi^4} .$$

Für $\phi - 3\sin\phi \geq 0$, und damit sicherlich für

$$\phi \geq 3 \text{ gilt: } f_2'(\phi) \leq 0.$$

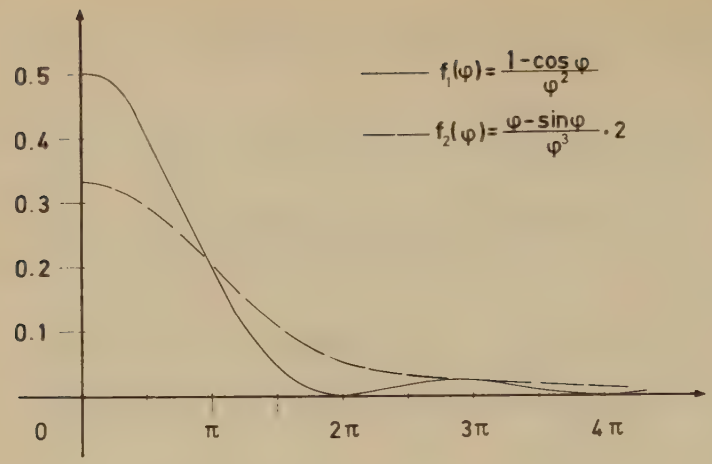
Es bleibt noch zu zeigen, daß $f_2'(\phi) \leq 0$ ist für $0 \leq \phi \leq 3$.

Wegen $3 < \pi$ und $\sin\phi t \geq 0$ für $0 \leq \phi \leq \pi; 0 \leq t \leq 1$ folgt

das aber aus

$$f_2'(\phi) = -\int_0^1 (1-t)^2 \, t \sin\phi t \, dt \leq 0.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.



3 Partialsummen der geometrischen Reihe $s_n^\alpha(z)$.

Es sei $n \geq 0$, ganz; α reell. Im folgenden gelten die Bezeichnungen:

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} .$$

Für Zahlenfolgen a_n sei

$$s_n^\alpha(\{a_\nu\}) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\, a_\nu .$$

Für $\{a_n\} = \{z^n\}$, wenn z eine komplexe Variable ist, sei

$$s_n^\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\, z^\nu = s_n^\alpha(\{z^\nu\}).$$

Bei der weiteren Rechnung werden die folgenden bekannten Beziehungen benutzt:

(2) $$s_n^{\alpha}(\{s_\nu^{\beta}(\{a_\mu\})\}) = s_n^{\alpha+\beta}(\{a_\mu\}).$$

Hardy [2] Seite 97, Formel 5.4.8.

(3) $$A_n^{\alpha} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + O((n+1)^{\alpha-1})$$

$$= O(n^{\alpha}).$$

Hardy [2] S.XV.

Die im folgenden auftretenden Argumente komplexer Zahlen B seien eindeutig erklärt durch $-\pi < \arg B \leq \pi$.

Lemma 2 Es sei $z \neq 1$; $k>0$ ganz; $n\geq 0$ ganz und $\beta \geq 0$.

Dann gilt:

(a) $$s_n^k(z) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-z)^{\mu-1}}{(1-z)^{\mu}} A_n^{k-\mu} + (-1)^k \frac{z^{n+k}}{(1-z)^k}.$$

(b) $$s_n^{k+\beta}(z) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-z)^{\mu-1}}{(1-z)^{\mu}} A_n^{k+\beta-\mu} + (-1)^k \frac{z^k}{(1-z)^k} s_n^{\beta}(z).$$

Beweis:

Es soll (a) induktiv bewiesen werden. Für k=1 ist die Behauptung trivial. Es sei vorausgesetzt, daß (a) für k gilt. Dann erhält man durch Einsetzen für $s_n^{k+1}(z)$:

$$s_n^{k+1}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^k(z)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-z)^{\mu-1}}{(1-z)^{\mu}} A_\nu^{k-\mu} + (-1)^k \frac{z^{k+\nu}}{(1-z)^k} \right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-z)^{\mu-1}}{(1-z)^{\mu}} A_n^{k+1-\mu} + (-1)^k \frac{1}{(1-z)^k} \cdot \frac{1-z^{n+1}}{1-z} z^k,$$

wobei (2) benutzt wird. Es folgt die Behauptung (a).

Die Behauptung (b) wird mit Formel (2) und Teil (a) bewiesen.

$$s_n^{k+\beta}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} s_\nu^k(z)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} \left(\sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-z)^{\mu-1}}{(1-z)^{\mu}} A_\nu^{k-\mu} + (-1)^k \frac{z^{\nu+k}}{(1-z)^k} \right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-z)^{\mu-1}}{(1-z)^{\mu}} A_n^{k+\beta-\mu} + (-1)^k \frac{z^k}{(1-z)^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} z^\nu.$$

Damit ist (b) bewiesen.

Lemma 3 Es sei $|z| < 1; z \neq 1; n > 0$ ganz. Dann gelten die Beziehungen:

(a) Für $0 \leq \beta < 1$ und festes z ist $s_n^\beta(z)$ in n beschränkt.

(b) $s_n^\alpha(z) = \frac{1}{1-z} A_n^{\alpha-1} + o(A_n^{\alpha-1})$ für $\alpha > 1$.

(c) Es sei $-\pi < \phi \leq \pi$ und $\alpha > 1$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \arg(s_n^\alpha(e^{i\phi})) = \arg((1-e^{i\phi})^{-1}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}.$$

(Der Beweis ist klar nach Teil (b) dieses Lemmas.)

Es sei $|z_1|<1, |z_2|<1$ und $\alpha \geq 0$. Dann wird

$$(d) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^\alpha(z_1)\, z_2^{n-\nu} = \frac{s_{n+1}^\alpha(z_1) - s_{n+1}^\alpha(z_2)}{z_1 - z_2}.$$

Beweis: Die Behauptung (a) ist richtig für $\beta=0$. Es sei $\beta>0$. Dann gilt mit (2)

$$\left|s_n^\beta(z)\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-2}\, s_\nu^1(z)\right|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left| A_{n-\nu}^{\beta-2} \right| \left(\left| \frac{1}{1-z} \right| + \left| \frac{z^{\nu+1}}{1-z} \right| \right).$$

Mit (3) wird

$$\left|s_n^\beta(z)\right| \leq \left|\frac{2}{1-z}\right| \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{\beta-1}(1+o(1)) = \left| \frac{1}{1-z} \right| \cdot O(1).$$

Zum Beweis der Behauptung (b) sei $|z|<1; z \neq 1$ fest und $\alpha>1$. Sei $\beta = \alpha - [\alpha]$. Nach Lemma 2 (b) ist dann

$$\left|s_n^\alpha(z) - \frac{1}{1-z} A_n^{\alpha-1}\right| = \left|\sum_{\mu=2}^{[\alpha]} \frac{(-z)^{\mu-1}}{(1-z)^\mu} A_n^{\alpha-\mu} + (-1)^{[\alpha]} \frac{z^{[\alpha]}}{(1-z)^{[\alpha]}}\, s_n^\beta(z)\right|$$

$$= O(n^{\alpha-2}) + O(1) = o(n^{\alpha-1}),$$

mit (3) und Teil (a) dieses Lemmas.

Zum Beweis von (d) sei $|z_1|<1; |z_2|<1$ und $\alpha>0$. Dann gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} z_2^{\nu}\, s_{n-\nu}^{\alpha}(z_1) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\, \frac{z_1^{\nu+1} - z_2^{\nu+1}}{z_1 - z_2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n+1} A_{n+1-\nu}^{\alpha-1}\, \frac{z_1^{\nu} - z_1^{\nu}}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_1 - z_2}\left(A_{n+1}^{\alpha-1} - A_{n+1}^{\alpha-1}\right)$$

$$= \frac{s_{n+1}^{\alpha}(z_1) - s_{n+1}^{\alpha}(z_2)}{z_1 - z_2}\,.$$

Damit ist (d) bewiesen.

Lemma 4 Es sei $0<n$ ganz, $2 \le \alpha < \infty$ und $0 \le \phi < \infty$.

Dann gilt für festes ϕ und $n \to \infty$:

$$s_n^{\alpha}(e^{i\phi/n}) = \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\, e^{i\phi t}\, dt + o(1)\right).$$

Beweis: Durch Einsetzen von (3) erhält man:

$$s_n^{\alpha}(e^{i\phi/n}) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\, e^{i\frac{\nu}{n}\phi}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} e^{i\frac{\nu}{n}\phi}\left(\frac{(n-\nu+1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + O\left((n-\nu+1)^{\alpha-2}\right)\right)$$

$$= \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)^{\alpha-1} e^{i\frac{\nu-1}{n}\phi}\, e^{i\frac{\phi}{n}\phi}\, \frac{1}{n}\right.$$

$$\left. + O\left(\sum_{\nu=0}^{n} \left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)^{\alpha-2} e^{i\frac{\nu}{n}\phi}\, \frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Nach der Definition des Riemann-Integrals gilt:

$$s_n^\alpha(e^{i\phi/n}) = \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} e^{i\phi t} \, dt + o(1) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{n^2} \right).$$

Es folgt die Behauptung für $\alpha \geq 2$.

Bezeichnung: Sei eine Folge $t_n(z)$ für z aus einem Bereich D gegeben. Dann liegen die $t_n(z)$ für $n=1,2,\ldots$ in einer Halbebene, wenn für ein χ mit $-\pi < \chi \leq \pi$ gilt

$$\operatorname{Re}\,(e^{i\chi} t_n(z)) > 0 \quad \text{für } n=1,2,\ldots \text{ und } z \in D.$$

Satz 2

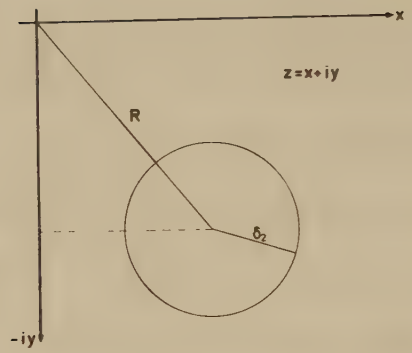
Sei $0 \leq \alpha < 3$. Dann existieren ϕ, ψ mit $0 < \psi < \phi < \pi$, so daß $s_n^\alpha(e^{i\phi}) - s_n^\alpha(e^{i\psi})$ für $n=1,2,\ldots$ nicht in einer Halbebene liegen. Außerdem gibt es noch $|z_1| < 1, |z_2| < 1$, so daß $s_n^\alpha(z_1) - s_n^\alpha(z_2)$ für $n=1,2,\ldots$ nicht in einer Halbebene liegen.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für $2 \leq \alpha < 3$ zu zeigen, da nach (2) gilt: $s_n^\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{\alpha-1}(z)$.

Sei also $2 \leq \alpha < 3$ und $\hat{\phi}, \hat{\psi}$ so gewählt, daß $\hat{\phi} > \hat{\psi} > 0$ ist mit

$$(4) \qquad \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} (e^{i\hat{\phi}t} - e^{i\hat{\psi}t}) \, dt = R, \quad \operatorname{Re} R > 0.$$

Das ist wegen Satz 1 möglich, da $1 \leq \alpha-1 < 2$ ist.



Sei $\delta_2 = \frac{1}{2}$ Re R ($\delta_2 > 0$).Dann besitzt der Kreis $R + \delta_2 e^{i\vartheta}$, $-\pi < \vartheta \leq \pi$,nur Punkte mit positivem Realteil.Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit:

(5) $$\frac{\pi}{2} > \arg\,(R + \delta_2 t\, e^{i\vartheta}) > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

wenn $0 \leq t \leq 1$ und $-\pi < \vartheta \leq \pi$ ist.

Nach Lemma 4 gilt für $k \geq 1$,ganz:

$$s_k^\alpha(e^{i\hat{\varphi}/k}) - s_k^\alpha(e^{i\hat{\psi}/k}) = \frac{k^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}(e^{i\hat{\varphi}t} - e^{i\hat{\psi}t})dt + o(1)\right)$$

$$= \frac{k^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,(R + o(1)), \quad \text{mit (4).}$$

Sei n_0 so groß gewählt,daß für $m > n_0$ die Punkte

$s_m^\alpha(e^{i\hat{\varphi}/m}) - s_m^\alpha(e^{i\hat{\psi}/m})$ im Kreis $\frac{m^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(R + \delta_2 e^{i\vartheta})$, $-\pi < \vartheta \leq \pi$, liegen.

Dann gilt nach (5):

(6) $\frac{\pi}{2} > \arg\left(s_n^\alpha\left(\frac{\hat\phi}{n}\right) - s_m^\alpha\left(\frac{\hat\psi}{m}\right)\right) > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ für ganze $m > n_0$.

Nun wird eine natürliche Zahl n gewählt, so daß gilt $n > n_0$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{\hat\phi}{n} + \frac{\hat\psi}{n}\right) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, wobei $\frac{\hat\phi}{n} < \pi$ sein soll.

Setzt man $\phi = \frac{\hat\phi}{n}$ und $\psi = \frac{\hat\psi}{n}$, so ist $\pi > \phi > \psi > 0$.

Es wird $s_1^\alpha(e^{i\phi}) - s_1^\alpha(e^{i\psi}) = \alpha + e^{i\phi} - \alpha - e^{i\psi}$, und

$\arg\left(s_1^\alpha(e^{i\phi}) - s_1^\alpha(e^{i\psi})\right) = \arg\left(2\sin\frac{\phi-\psi}{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\phi+\psi)\right)}\right)$.

Da $0 < \phi - \psi < \pi$, ist also

(7) $\frac{\pi}{2} < \arg\left(s_1^\alpha(e^{i\phi}) - s_1^\alpha(e^{i\psi})\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\phi+\psi}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

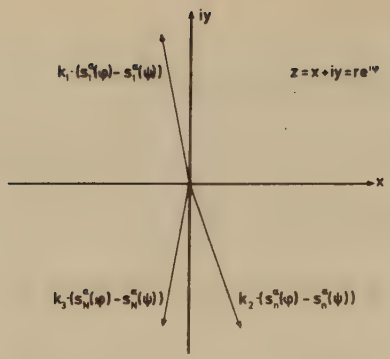
Aus Teil (c) von Lemma 3 folgt:

$$\lim_{k\to\infty} \arg\left(s_k^\alpha(e^{i\phi}) - s_k^\alpha(e^{i\psi})\right) = \arg\left((1-e^{i\phi})^{-1} - (1-e^{i\psi})^{-1}\right)$$

$$= \arg\left(e^{i\phi} - e^{i\psi}\right) - \arg(1-e^{i\phi}) - \arg(1-e^{i\psi});$$

(8) $$\lim_{k\to\infty} \arg\left(s_k^\alpha(e^{i\phi}) - s_k^\alpha(e^{i\psi})\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Aus den Zeilen (6), (7) und (8) erhält man für k=1, k=n und k=N, wenn N eine hinreichend große natürliche Zahl ist, drei Vektoren $s_k^\alpha(e^{i\phi}) - s_k^\alpha(e^{i\psi})$, die nicht in einer Halbebene liegen.



Es sei $\hat{z}_1 = r\, e^{i\phi}, \hat{z}_2 = r\, e^{i\psi}$ für $0 < r \leq 1$. Da die $s_k^\alpha(z)$ in der ganzen komplexen Ebene reguläre Funktionen sind, gilt $\lim_{r \to 1} (s_k^\alpha(\hat{z}_1) - s_k^\alpha(\hat{z}_2)) = s_k^\alpha(e^{i\phi}) - s_k^\alpha(e^{i\psi})$. Daraus folgt, daß es ein $r_1 < 1$ geben muß, so daß die Behauptung für $z_1 = r_1 e^{i\phi}$ und $z_2 = r_1 e^{i\psi}$ erfüllt ist.

4 Gegenbeispiel zu einem Satz von Szegö.

Lemma 5 Es sei $0 \leq \alpha < \infty$ und N eine natürliche Zahl. Zu jeder positiven Folge b_n mit $b_N \neq 0$ und $b_n = 0$ für $n > N$ gibt es eine α-fach monotone Folge a_n mit $\Delta^\alpha a_n = b_n$.[2])

---

[2]) Sind die Glieder der Folge a_n von einer Stelle N ab

Beweis: Sei $a_n = 0$ für $n>N$ gesetzt. Weiterhin sei

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{N-n} A_\nu^{\alpha-1} b_{n+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} b_{n+\nu}.$$

Dann gilt wegen Zeile (3) für $0 \leq \beta \leq \alpha$:

$$\Delta^\beta a_n = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{-\beta-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} b_{n+\nu+\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{\alpha-\beta-1} b_{n+\mu} \geq 0,$$

womit Lemma 5 bewiesen ist.

Lemma 6 (Kempner [4])

Seien z_n komplexe Zahlen. Genau dann existiert eine positive Folge p_n mit $\sum_{\nu=0}^{m} p_\nu z_\nu = 0$, wenn die Punkte z_n nicht in einer Halbebene liegen.

Es sei $f(z)$ eine reguläre Funktion in $|z|< 1$ und A eine komplexe Konstante mit $z_1 f(z_1) = A$ für ein $|z_1|< 1$. Dann ist

$$-A + z\,f(z) = \frac{z\,f(z) - z_1 f(z_1)}{z - z_1} \quad (z - z_1)$$

---

gleich Null, so treten für die endlichen Summen $\Delta^\alpha a_n$ keine Konvergenzschwierigkeiten auf. Das wird in dieser Arbeit stets so sein. Für den allgemeinen Fall sei auf Arbeiten von Kaluza [3] und Knopp [5] verwiesen.

$$=: (z - z_1)\, f_{z_1}(z),$$

wobei $f_{z_1}(z)$ für $|z| < 1$ und $|z_1| < 1$ eine reguläre Funktion ist. Beachtet man die zu Anfang gegebene Definition der Schlichtheit, so gilt:

(9) $z \cdot f(z)$ ist schlicht genau dann, wenn $f_{z_1}(z) \neq 0$ ist für $|z_1| < 1, |z| < 1$.

Lemma 7 Es sei a_n eine reelle Zahlenfolge mit $a_n = 0$ von einer Stelle a_n. Dann wird $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine reguläre Funktion für komplexe z. Für $|z| < 1, |z_1| < 1$ und für jedes $\alpha \geq 0$ gilt dann:

$$f_{z_1}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{\alpha} a_{\nu} \; \frac{s_{\nu+1}^{\alpha}(z) - s_{\nu+1}^{\alpha}(z_1)}{z - z_1}.$$

Beweis: Es ist wieder zu beachten, daß die Summen nur endlich viele Glieder ungleich Null haben. Die auftretenden Reihen sind also absolut konvergent.

Nach Lemma 3(d) und der anfangs gegebenen Definition der Differenz $\Delta^{\alpha} a_n$ gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{\alpha} a_{\nu} \; \frac{s_{\nu+1}^{\alpha}(z) - s_{\nu+1}^{\alpha}(z_1)}{z - z_1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{\alpha} a_{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} s_{\nu-\mu}^{\alpha}(z)\, z_1^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu}^{\alpha}(z)\, \Delta^{\alpha}\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu+\mu} z_1^{\mu}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\alpha-1} \sum_{\pi=0}^{\infty} A_{\pi}^{-\alpha-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu+\nu+\pi}\, z_1^{\mu}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\pi=0}^{\infty} z^{n} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu+\pi+n}\, z_1^{\mu} \sum_{\nu=0}^{\pi} A_{\nu}^{\alpha-1} A_{\pi-\nu}^{-\alpha-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n+\mu}\, z_1^{\mu} = \frac{1}{z - z_1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z_1^{n+1}\Big)$$

$$= f_{z_1}(z).$$

Bemerkung: Lemma 7 gilt auch für unendliche Folgen a_n. Die genaue Rechnung wurde von Fejer [1] durchgeführt.

Satz 3

Es sei $0 \leq \alpha < 3$ und a_n eine α-fach monotone Folge, die aber nicht 3-fach monoton ist. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $|z| < 1$ eine reguläre Funktion.

Dann ist $z f(z)$ nicht notwendig schlicht; d.h. für beliebiges komplexes a kann $a + z f(z)$ in $|z| < 1$ mehr als eine Nullstelle haben.

Beweis: Nach (9) ist die Behauptung richtig, wenn

eine Funktion $f(z)$ in $|z|<1$ existiert, so daß $f_{z_2}(z_1) = 0$ ist für geeignete $|z_1|<1; |z_2|<1$.

(10) Es werden jetzt a_n und $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ aus dem Einheitskreis konstruiert, so daß $f_{\hat{z}_2}(\hat{z}_1) = 0$ ist.

Für $0 \leq \alpha < 3$ seien Zahlen $\hat{z}_1$ und $\hat{z}_2$ aus dem Einheitskreis und eine natürliche Zahl N so gewählt, daß

$$\frac{s_n^\alpha(\hat{z}_1) - s_n^\alpha(\hat{z}_2)}{\hat{z}_1 - \hat{z}_2} \qquad \text{für } n=1,\ldots,N+1$$

nicht in einer Halbebene liegen. (Das ist nach Satz 1 möglich.) Dann existiert nach Lemma 6 eine Folge b_n mit $b_n \geq 0$ für $n < N, b_N > 0$ und $b_n = 0$ für $n \neq N$, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{s_{n+1}^\alpha(\hat{z}_1) - s_{n+1}^\alpha(\hat{z}_2)}{\hat{z}_1 - \hat{z}_2} = 0 \qquad \text{ist.}$$

Lemma 5 besagt, daß zu b_n eine α-fach monotone Folge a_n existiert mit $\Delta^\alpha a_n = b_n$. Nach Lemma 7 gilt für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$f_{z_2}(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\alpha a_n \frac{s_{n+1}^\alpha(z_1) - s_{n+1}^\alpha(z_2)}{z_1 - z_2}$$

wenn $|z_1|<1; |z_2|<1$ ist. Damit ist gezeigt, daß für

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ gilt: $f_{\hat{z}_2}(\hat{z}_1) = 0$.

Wegen Zeile (10) ist damit der Satz bewiesen.

Bemerkung: In den Sätzen 2 und 3 ist $\alpha < 3$. Für $\alpha = 3$ gilt der Satz von Szegö. Daraus folgt mit (3), (11) und Lemma 6, daß für $\alpha \geq 3$ und $|z_1| < 1, |z_2| < 1$ $\frac{s_n^\alpha(z_1) - s_n^\alpha(z_2)}{z_1 - z_2}$ für $n=1,2,\ldots$ in einer Halbebene liegen.

5 Gegenbeispiel zu einem Satz von Peyerimhoff

Satz (Peyerimhoff [7])

Es sei $k > 0$ ganz und a_n eine $(k+1)$-fach monotone Folge. Sei $P_{k-1}(z)$ ein Polynom vom Grade $\leq k-1$ mit reellen Koeffizienten. Dann hat

$$\Phi(z) = P_{k-1}(z) + z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

höchstens k Nullstellen in $|z| < 1$.

Beim Beweis dieses Satzes wird der in Zeile (9) benutzte Schluß iteriert: $f_{z_1 z_2}(z) = (f_{z_1})_{z_2}(z)$. Aus ähnlichen Rechnungen wie in Lemma 7 und speziellen Eigenschaften der

$s_n^{\alpha}(z)$ kann man Beispiele konstruieren, die zeigen, daß der Satz nicht verbessert werden kann.

Satz 4 Es sei $k \geq 0$ ganz und $0 \leq \alpha < (k+1)$. Sei a_n eine α-fach monotone, aber nicht $(k+1)$-fach monotone Folge und $P_{k-1}(z)$ ein Polynom vom Grade $\leq (k-1)$ mit reellen Koeffizienten. Dann kann $F(z) = P_{k-1}(z) + z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mehr als k Nullstellen in $|z| < 1$ haben.

Gegenbeispiel: $F(z) = (z + \frac{\alpha}{k+1})^{k+1}$.

Es bleibt noch nachzuweisen, daß sich das Gegenbeispiel in der gewünschten Form schreiben läßt.

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k+1}{\nu} \left(\frac{\alpha}{k+1}\right)^{k+1-\nu} z^{\nu} + z^k(\alpha + z)$$
$$= P_{k-1}(z) + z^k(\alpha + z).$$

Die Folge $\{a_n\} = \{\alpha, 1, 0, \ldots\}$ ist α-fach monoton, denn für $0 \leq \beta \leq \alpha$ gilt:

$$\Delta^{\beta} a_0 = \alpha - \beta \geq 0,$$

$$\Delta^{\beta} a_1 = 1$$

und $\Delta^{\beta} a_n = 0$ für $n \geq 2$.

6 Schlußbemerkung

Zum Schluß sei noch darauf verwiesen, daß die in der Einleitung erwähnten Funktionen $F(z) = P_{k-1}(z) + z^k f(z)$ schon früher behandelt wurden. Ozaki [6] hat 1935 im Rahmen der Theorie der k-wertigen Funktionen die Funktionen $F(z)$ als absolut k-wertig bezeichnet, wenn mit $z^k f(z)$ auch $F(z)$ höchstens k Nullstellen in $|z| < 1$ hat für beliebiges Polynom $P_{k-1}(z)$.

Das Problem der absolut k-wertigen Funktionen ist allgemeiner gehalten, als die Fragestellung in dieser Arbeit. Die Kriterien von Ozaki führen daher auch für Potenzreihen mit mehrfach monotonen Koeffizienten zu schärferen Bedingungen als die in dieser Arbeit erwähnten Sätze. Es bleibt zu untersuchen, ob sich mit den hier benutzten Methoden auch aus den Arbeiten von Ozaki neue Sätze gewinnen lassen.

7 Literaturverzeichnis

[1] Fejer "Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge." Acta Litt. Szeged 8,1936 S. 89-115

[2] Hardy "Divergent Series." Oxford Univ. Press 1956

[3] Kaluza "Mehrfach monotone Zahlenfolgen." Math. Zeitschrift 26,1927 S. 345-364

[4] Kempner "Über die Separation komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen." Math. Ann. 85,1922 S. 49-59

[5] Knopp "Mehrfach monotone Zahlenfolgen." Math. Zeitschrift 22,1925 S. 75-85

[6] Ozaki "On the Theory of Multivalent Functions." Sci. Rep. Tokyo A 2,1934/35 S. 41-55, 99-102, 167-188

[7] Peyerimhoff Private Mitteilung

[8] Szegö "Power Series with Multiply Monotonic Sequences." Duke Math. J. 8, 1941 S. 559-564

[9] Zygmund "Trigonometric Series." Chelsea Publ. Comp.,New York 1952 S. 224

Lebenslauf

Am 2. Mai 1945 wurde ich in Marburg/Lahn geboren. Von 1951 - 1958 besuchte ich die Volksschule in Ohrdruf in Thüringen. Nach der Flucht aus der DDR im Jahre 1958 wurde ich in Marburg in die Untertertia eingestuft. Von 1959 - 1964 besuchte ich die Herderschule, ein Realgymnasium in Kassel, wo ich mit der Reifeprüfung abschloß. Danach studierte ich an der Philipps-Universität Marburg Mathematik und Physik. Hier bestand ich die Diplomvorprüfung und die Diplomprüfung (1968) für Mathematiker.

Meinen akademischen Lehrern in Marburg möchte ich auf diesem Wege danken, besonders Herrn Prof. Dr. A. Peyerimhoff, auf dessen Anregung die vorliegende Arbeit entstand.

Marburg/Lahn 1969